CONCOURS ESIM

FILIERE MP

MATHEMATIQUES 2

Préliminaire

1- Quand t tend vers 0, $f(t) \sim \dfrac{t \times t}{t^2/2} = 2$. Par suite, f est prolongeable par continuité en 0. f étant d'autre part continue sur $]0, \pi]$, f est intégrable sur $]0, \pi]$. On en déduit l'existence de I.

2- g est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodique et on peut donc calculer ses coefficients de FOURIER. g est paire et donc, pour tout entier naturel non nul, on a $b_n(g) = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
a_n(g) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(\alpha x)\cos(nx)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\cos((n+\alpha)x) + \cos((n-\alpha)x)\ dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin((n+\alpha)x)}{n+\alpha} + \frac{\sin((n-\alpha)x)}{n-\alpha}\right]_0^{\pi} \text{ (puisque } \alpha \text{ n'est pas entier)} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((n+\alpha)\pi)}{n+\alpha} + \frac{\sin((n-\alpha)\pi)}{n-\alpha}\right) = \frac{(-1)^n \sin(\alpha\pi)}{\pi}\left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n-\alpha}\right) \\
&= \frac{(-1)^n \sin(\alpha\pi)2\alpha}{\pi(\alpha^2 - n^2)}
\end{aligned}$$

La série de FOURIER de g est donc $\dfrac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(\alpha\pi)2\alpha}{\alpha^2 - n^2}\cos(nx)$. Maintenant, g est de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique et donc, d'après le théorème de DIRICHLET, la série de FOURIER de g converge en tout x réel et a pour somme $\dfrac{1}{2}(g(x^+) + g(x^-))$.

En particulier, pour $x = \pi$, puisque $\dfrac{1}{2}(g(x^+) + g(x^-)) = \dfrac{1}{2}(\cos(-\alpha\pi) + \cos(\alpha\pi)) = \cos(\alpha\pi)$, on obtient :

$$\cos(\alpha\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sin(\alpha\pi)2\alpha}{\alpha^2 - n^2}\cos(n\pi) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\alpha\pi)2\alpha}{\alpha^2 - n^2}.$$

Soit maintenant θ un réel élément de $]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$. Le réel $\alpha = \dfrac{\theta}{\pi}$ est élément de $]-1, 1[\setminus\{0\}$ et en particulier n'est pas entier. De ce qui précède on déduit :

$$\cos(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(\theta)\dfrac{2\theta}{\pi}}{\dfrac{\theta^2}{\pi^2} - n^2} = \frac{\sin(\theta)}{\theta} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\theta\sin(\theta)}{n^2\pi^2 - \theta^2}$$

En divisant les deux membres par le réel non nul $\sin(\theta)$, on obtient :

$$\boxed{\forall \theta \in]-\pi, \pi[\setminus\{0\},\ \text{cotan}(\theta) = \frac{1}{\theta} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\theta}{n^2\pi^2 - \theta^2}.}$$

Partie I

1- La fonction $u \mapsto \ln(\sin(u))$ est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$. De plus, quand u tend vers 0,

$$\ln(\sin(u)) \sim \ln(u) = o\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right).$$

On en déduit que la fonction $u \mapsto \ln(\sin(u))$ est intégrable au voisinage de 0 et donc sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ et en particulier sur $]0, \frac{\pi}{2}[$. De même, puisque $\ln(\cos(u)) = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)\right)$, la fonction $u \mapsto \ln(\cos(u))$ est intégrable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et en particulier sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

2- a- D'après 1-, les deux intégrales proposées existent. De plus, en posant $v = \frac{\pi}{2} - u$, on obtient :

$$L = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u))\,du = \int_{\pi/2}^{0} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)\right) \times (-dv) = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(v))\,dv = K.$$

b-

$$\begin{aligned}
2K = K + L &= \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(u)\sin(u))\,du = \int_0^{\pi/2} \ln\left(\frac{\sin(2u)}{2}\right)\,du = -\frac{\pi\ln 2}{2} + \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(2u))\,du \\
&= -\frac{\pi\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(v))\,dv \text{ (en posant } v = 2u) \\
&= -\frac{\pi\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\left(K + \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(v))\,dv\right) = -\frac{\pi\ln 2}{2} + \frac{1}{2}\left(K + \int_{\pi/2}^{0} \ln(\sin(\pi - w))\,(-dw)\right) \text{ (en posant } w = \pi - v) \\
&= -\frac{\pi\ln 2}{2} + K,
\end{aligned}$$

et finalement,

$$\boxed{K = L = -\frac{\pi\ln 2}{2}.}$$

3- Soit $\varepsilon \in]0, \pi]$. Les deux fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln(1 - \cos(t))$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon, \pi]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit :

$$\int_\varepsilon^\pi t\frac{\sin(t)}{1 - \cos(t)}\,dt = [t\ln(1 - \cos(t))]_\varepsilon^\pi - \int_\varepsilon^\pi \ln(1 - \cos(t))\,dt = \pi\ln 2 - \varepsilon\ln(1 - \cos(\varepsilon)) - \int_\varepsilon^\pi \ln(1 - \cos(t))\,dt.$$

Mais, quand ε tend vers 0,

$$\varepsilon\ln(1 - \cos(\varepsilon)) \sim \varepsilon\ln\left(\frac{\varepsilon^2}{2}\right) = 2\varepsilon\ln(\varepsilon) - \varepsilon\ln 2 \to 0.$$

Quand ε tend vers 0, on obtient

$$\begin{aligned}
I = \pi\ln 2 - \int_0^\pi \ln(1 - \cos(t))\,dt &= \pi\ln 2 - \int_0^\pi \ln(2\sin^2(t/2))\,dt = -\int_0^\pi \ln(\sin^2(t/2))\,dt \\
&= -\int_0^{\pi/2} \ln(\sin^2(u))\,2du = -4\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(u))\,du = -4K = 2\pi\ln 2.
\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{I = -4K = 2\pi\ln 2.}$$

Partie II

1- Quand n tend vers $+\infty$,

$$v_n = 1 - n\left(\ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{2n}\right)\right) = 1 - n\left[\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2}\right) - \left(-\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2}\right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right] = O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

On en déduit que la série de terme général v_n converge.

2- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\|u_n\|_\infty = \sup\left\{|u_n(x)|,\ x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]\right\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, on a

$$|u_n(x)| = \frac{2x^2}{n^2 - x^2} \leqslant \frac{2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{n^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{2}{4n^2 - 1},$$

et donc, $\|u_n\|_\infty \leqslant \frac{2}{4n^2 - 1}$. Puisque $\frac{2}{4n^2 - 1} \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, la série de terme général $\frac{2}{4n^2 - 1}$ converge et donc la série numérique de terme général $\|u_n\|_\infty$ converge.

On a montré que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, et en particulier converge uniformément et simplement sur ce même intervalle.

Puisque chaque fonction u_n, $n \geq 1$, est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et que la série de fonction de terme général u_n converge uniformément sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, la somme S est continue sur le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. En particulier, Σ existe.

3- a- Puisque la série de fonctions de terme général u_n converge uniformément sur le segment $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, on peut intégrer terme à terme et on obtient

$$\Sigma = \int_0^{1/2} S(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{1/2} u_n(x)\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n,$$

avec

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{1/2} \frac{2x^2}{x^2 - n^2}\, dx = \int_0^{1/2} \left(2 + \frac{n}{x - n} - \frac{n}{x + n}\right)\, dx = 1 + n\left[\ln(n - x) - \ln(n + x)\right]_0^{1/2} \\ &= 1 + n\left(\ln\left(n - \frac{1}{2}\right) - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) = 1 - n\ln\left(\frac{2n + 1}{2n - 1}\right) = v_n. \end{aligned}$$

b- Soit $N \geq 2$.

$$\begin{aligned} \Sigma_N &= \sum_{n=1}^{N} \left(1 - n\ln\left(\frac{2n + 1}{2n - 1}\right)\right) = N - \sum_{n=1}^{N} n\ln(2n + 1) + \sum_{n=1}^{N} n\ln(2n - 1) \\ &= N - \sum_{n=2}^{N+1} (n - 1)\ln(2n - 1) + \sum_{n=2}^{N} n\ln(2n - 1) = N - N\ln(2N + 1) + \sum_{n=2}^{N} \ln(2n - 1) \end{aligned}$$

Par suite, d'après la formule de Stirling

$$\begin{aligned} e^{\Sigma_N} &= \frac{e^N \times 1 \times 3 \ldots \times (2N - 1)}{(2N + 1)^N} = \frac{e^N (2N)!}{(2N + 1)^N 2 \times 4 \times \ldots \times (2N)} = \frac{e^N (2N)!}{(2N + 1)^N 2^N N!} \\ &\underset{N \to +\infty}{\sim} \frac{e^N (2N/e)^{2N} \sqrt{2\pi \times 2N}}{(2N + 1)^N 2^N (N/e)^N \sqrt{2\pi N}} = \frac{\sqrt{2}}{\left(1 + \frac{1}{2N}\right)^N} = \sqrt{2} e^{-N\ln(1 + \frac{1}{2N} + o(\frac{1}{N}))} = \sqrt{2} e^{-\frac{1}{2} + o(1)} \\ &\underset{N \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{e}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\Sigma = \ln\left(\sqrt{\frac{2}{e}}\right) = \frac{\ln 2 - 1}{2}.}$$

4- D'après le préliminaire, pour $x \in]0, 1/2]$

$$\text{cotan}(\pi x) = \frac{1}{\pi x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2\pi x}{n^2\pi^2 - \pi^2 x^2} = \frac{1}{\pi x} - \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2},$$

et donc,

$$\pi x\,\text{cotan}(\pi x) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x^2}{n^2 - x^2} = 1 + S(x).$$

Donc,

$$\begin{aligned}\Sigma &= \int_0^{1/2} S(x)\,dx = \int_0^{1/2} (-1 + \pi x\,\text{cotan}(\pi x))\,dx = -\frac{1}{2} + \int_0^{\pi} \frac{t}{2}\,\text{cotan}(\frac{t}{2})\,\frac{1}{2\pi}dt \text{ (en posant } t = 2\pi x)\\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} t\frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\,dt = -\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} t\frac{2\sin(t/2)\cos(t/2)}{2\sin^2(t/2)}\,dt\\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\int_0^{\pi} t\frac{\sin(t)}{1-\cos(t)}\,dt = -\frac{1}{2} + \frac{I}{4\pi}.\end{aligned}$$

Par suite, $-\frac{1}{2} + \frac{I}{4\pi} = \Sigma = \frac{\ln 2 - 1}{2}$ puis $I = 4\pi \times \frac{\ln 2}{2} = 2\pi \ln 2$.

Partie III

1- Pour $(x, t) \in [0, 1]\times]0, \pi]$, $x^2 - 2x\cos(t) + 1 = (x - \cos(t))^2 + \sin^2(t) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $\sin(t) = 0$ et $x = \cos(t)$ ce qui impose $t = \pi$ et donc $x = -1 \notin [0, 1]$. Donc, $\forall (x, t) \in [0, 1]\times]0, \pi]$, $x^2 - 2x\cos(t) + 1 > 0$.

Ainsi, on a déjà

1) $\forall x \in [0, 1]$, la fonction $t \mapsto h(x, t) = \dfrac{xt\sin(t)}{x^2 - 2x\cos(t) + 1}$ est continue par morceaux sur $]0, \pi]$

2) $\forall t \in]0, \pi]$, la fonction $x \mapsto h(x, t) = \dfrac{xt\sin(t)}{x^2 - 2x\cos(t) + 1}$ est continue sur $[0, 1]$.

Soit alors $t \in]0, \pi]$. La fonction $x \mapsto \dfrac{xt\sin(t)}{x^2 - 2x\cos(t) + 1}$ est dérivable sur $[0, \pi]$, de dérivée

$$t\sin(t)\frac{(x^2 - 2x\cos(t) + 1) - x(2x - 2\cos(t))}{(x^2 - 2x\cos(t) + 1)^2} = t\sin(t)\frac{1 - x^2}{(x^2 - 2x\cos(t) + 1)^2} \geqslant 0.$$

Ainsi, pour $t \in]0, \pi]$ fixé, la fonction $x \mapsto \dfrac{xt\sin(t)}{x^2 - 2x\cos(t) + 1}$ est croissante sur $[0, 1]$. On en déduit que pour $(x, t) \in [0, 1]\times]0, \pi]$,

$$0 = h(0, t) \leq h(x, t) \leq h(1, t) = \frac{t\sin(t)}{2 - 2\cos(t)} = \frac{1}{2}f(t).$$

En résumé,

1) $\forall x \in [0, 1]$, la fonction $t \mapsto h(x, t)$ est continue par morceaux sur $]0, \pi]$

2) $\forall t \in]0, \pi]$, la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est continue sur $[0, 1]$.

3) $\forall (x, t) \in [0, 1]\times]0, \pi]$, $|h(x, t)| \leqslant \frac{1}{2}f(t)$ où $\frac{1}{2}f$ est, d'après le préliminaire, une fonction continue, positive et intégrable sur $]0, \pi]$.

D'après le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre,

$$\boxed{\text{la fonction } H \text{ est continue sur } [0, 1].}$$

2- Soit $t \in]0, \pi[$. L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence de l'énoncé est $z^2 - 2z\cos(t) + 1 = 0$. Les racines de cette équation sont les deux nombres e^{it} et e^{-it}. Puisque $t \in]0, \pi[$, les deux nombres e^{it} et e^{-it} sont distincts et on sait alors que les suites complexes cherchées sont les suites de la forme $n \mapsto \lambda(e^{it})^n + \mu(e^{it})^n$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$, ou aussi que les suites réelles cherchées sont les suites de la forme

$$n \mapsto \lambda\cos(nt) + \mu\sin(nt),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

3- Soit $t \in [0,\pi]$. La fonction $x \mapsto h(x,t)$ est une fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle et est donc développable en série entière au voisinage de 0. Notons R le rayon de convergence de cette série puis, pour $x \in]-R,R[\cap]-1,1[$, posons $h(x,t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)x^n$. On a

$$\begin{aligned}
t\sin(t)x &= (1-2x\cos(t)+x^2)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)x^n - 2\cos(t)\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)x^{n+2} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(t)x^n - 2\cos(t)\sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}(t)x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} a_{n-2}(t)x^n \\
&= a_0(t) + (a_1(t) - 2\cos(t)a_0(t)) + \sum_{n=2}^{+\infty}(a_n(t) - 2\cos(t)a_{n-1}(t) + a_{n-2}(t))x^n.
\end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on a alors $a_0(t) = 0$, $a_1(t) - 2\cos(t)a_0(t) = t\sin(t)$, et donc, $a_1(t) = t\sin(t)$. Puis, pour $n \geqslant 2$, $a_n(t) - 2\cos(t)a_{n-1}(t) + a_{n-2}(t) = 0$.
D'après 2-, il existe deux réels λ et μ tels que, pour tout entier naturel n, $a_n(t) = \lambda\cos(nt) + \mu\sin(nt)$.
$n = 0$ fournit $\lambda = 0$ puis $n = 1$ fournit $\mu\sin(t) = t\sin(t)$ et donc $\mu = t$, si $t \in]0,\pi[$. Finalement, si $t \in]0,\pi[$, $a_n(t) = t\sin(nt)$ ce qui reste clair dans le cas où $t \in \{0,\pi\}$ (dans ce cas, $x \mapsto h(x,t)$ est la fonction nulle et d'autre part, les $a_n(t)$ sont tous nuls).

Si $t \in \{0,\pi\}$, on a $R = +\infty$. Si $t \in]0,\pi[$, puisque la suite $(t\sin(nt))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on a $R \geqslant 1$, et puisque la suite $(t\sin(nt))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$, on a $R \leqslant 1$. Finalement $R = 1$. En particulier,

$$\boxed{\forall (x,t) \in [0,1[\times[0,\pi],\ \frac{xt\sin(t)}{x^2-2x\cos(t)+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} t\sin(nt)x^n.}$$

4- a- Soit $x \in [0,1[$ fixé. Pour tout t dans $[0,\pi]$ et tout entier naturel non nul n, posons $A_n(t) = a_n(t)x^n$ puis $\|A_n\|_\infty = \text{Sup}\{|A_n(t)|,\ t \in [0,\pi]\}$.
Pour tout t dans $[0,\pi]$ et tout entier naturel non nul n, $|a_n(t)x^n| = t|\sin(nt)|x^n \leqslant \pi x^n$ et donc $\|A_n\|_\infty \leqslant \pi x^n$. Puisque $x \in [0,1[$, la série numérique de terme général πx^n converge. On en déduit que la série de fonctions de terme général A_n converge normalement sur $[0,\pi]$.

b- Mais alors, (pour $x \in [0,1[$ fixé) la série de fonctions de terme général A_n converge uniformément sur le segment $[0,\pi]$ et on peut intégrer terme à terme pour obtenir

$$H(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \int_0^\pi t\sin(nt)\ dt,$$

c- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^\pi t\sin(nt)\ dt = \left[t\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nt)\ dt = \pi\frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Donc,

$$\boxed{\forall x \in [0,1[,\ H(x) = \pi\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = \pi\ln(1+x).}$$

Enfin, H étant continue en 1, on a

$$\frac{1}{2}I = \int_0^\pi \frac{t\sin(t)}{2-2\cos(t)}\ dt = H(1) = \lim_{x\to 1,\ x<1} H(x) = \pi\ln 2,$$

et on retrouve $I = 2\pi\ln 2$.

Partie IV

1- Sur $]0,1[$, l'équation s'écrit $y' + \dfrac{1}{x}y = -\dfrac{1}{x^2(x+1)} + \dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$. Comme les deux fonctions $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto -\dfrac{1}{x^2(1+x)} + \dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$ sont continues sur $]0,1[$, les solutions de (E) sur $]0,1[$ constituent un $\mathbb{R}$-espace affine de dimension 1.

Ensuite, $-\dfrac{1}{x(1+x)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{d}{dx}(\ln(x+1) - \ln(x))$ et d'autre part,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,x dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u\sqrt{1-u}}\,du \text{ (en posant } u = x^2)\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{(1-v^2)v}(-2vdv) \text{ (en posant } v=\sqrt{1-u} \text{ et donc } u = 1-v^2 \text{ et } du=-2vdv)\\ &= \int \frac{1}{v^2-1}\,dv = \int \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{v+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{v-1}\right)\,dv = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v-1}{v+1}\right| + C\end{aligned}$$

Par suite, sur $]0,1[$,

$$\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}} + C = -\frac{1}{2}\ln\frac{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2}{1-(1-x^2)} + C = -\ln\left(1+\sqrt{1-x^2}\right) + \ln(x) + C$$

En résumé, une primitive sur $]0,1[$ de la fonction $x \mapsto -\dfrac{1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$ est la fonction $x \mapsto \ln(x+1) - \ln(1+\sqrt{1-x^2})$.

On peut maintenant résoudre (E) sur $]0,1[$. Soit f une fonction dérivable sur $]0,1[$.

$$\begin{aligned}f \text{ solution de } (E) \text{ sur }]0,1[&\Leftrightarrow \forall x \in]0,1[,\ xf'(x)+f(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\\ &\Leftrightarrow \forall x \in]0,1[,\ (xf)'(x) = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}\\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,1[,\ xf(x) = \ln(x+1) - \ln(1+\sqrt{1-x^2}) + C\\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}/\ \forall x \in]0,1[,\ f(x) = \frac{1}{x}\left(\ln(x+1) - \ln\left(1+\sqrt{1-x^2}\right) + C\right)\end{aligned}$$

2- Toutes les solutions se prolongent par continuité en 1. D'autre part, quand x tend vers 0,

$$\frac{1}{x}(\ln(x+1) - \ln(1+\sqrt{1-x^2}) + C) = \frac{-\ln 2 + C + x + o(x)}{x} = \frac{C-\ln 2}{x} + 1 + o(1)$$

et cette fonction se prolonge par continuité en 0 si et seulement si $C = \ln 2$. Ainsi, il existe une et une seule solution qui se prolonge par continuité sur $[0,1]$, à savoir la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{x}\left(\ln(x+1) - \ln\left(1+\sqrt{1-x^2}\right) + \ln 2\right).$$

3- **a-** Posons $k\ :\ \begin{array}{ccc} [0,1]\times]0,\pi] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & \dfrac{t\sin(t)}{1-x\cos(t)} \end{array}$.

Pour $(x,t) \in [0,1]\times]0,\pi]$, $1 - x\cos(t) > 0$ et donc,
i) $\forall x \in [0,1]$, la fonction $t \mapsto k(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,\pi]$.
ii) $\forall t \in]0,\pi]$, la fonction $x \mapsto k(x,t)$ est continue sur $[0,1]$.
iii) Pour $(x,t) \in [0,1]\times]0,\pi]$, $|1 - x\cos t| = 1 - x\cos t \geqslant \begin{cases} 1-\cos t \text{ si } t \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ 1 \text{ si } t \in \left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right] \end{cases}$ et donc

$$\forall (x,t) \in [0,1]\times]0,\pi],\ |k(x,t)| \leqslant 1 + \frac{t\sin(t)}{1-\cos(t)} = g(t)$$

avec g continue positive et intégrable sur $]0,\pi]$ d'après le préliminaire puisque $g = 1 + f$.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

$$\boxed{\phi \text{ est continue sur } [0,1].}$$

Ensuite, k admet sur $[0,1]\times]0,\pi]$ une dérivée partielle par rapport à sa première variable x, à savoir :

$$\forall (x,t) \in [0,1]\times]0,\pi],\ \frac{\partial k}{\partial x}(x,t) = \frac{t\sin(t)\cos(t)}{(1-x\cos(t))^2}.$$

Il reste à se convaincre que la fonction $\dfrac{\partial k}{\partial x}$ vérifie les mêmes hypothèses que la fonction k.

Soit $(a,b) \in]0,1[^2$ tel que $a < b$.

i) $\forall x \in [a,b]$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial k}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,\pi]$.

ii) $\forall t \in]0,\pi]$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\partial k}{\partial x}(x,t)$ est continue sur $[a,b]$.

iii) $\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,\pi]$, $\left|\dfrac{\partial k}{\partial x}(x,t)\right| = \dfrac{t\sin(t)|\cos(t)|}{(1-x\cos(t))^2} \leqslant \dfrac{\pi}{(1-b)^2} = \varphi(t)$ car si $t \in \left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$, $(1-x\cos t)^2 \geqslant 1 \geqslant (1-b)^2$ et si $t \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $(1-x\cos t)^2 \geqslant (1-b\cos t)^2 \geqslant (1-b)^2$ (puisque à $t \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ fixé, la fonction $x \mapsto 1-x\cos t$ est décroissante et positive sur $[a,b]$). De plus, la fonction φ est continue positive et intégrable sur $]0,\pi]$ car est constante sur l'intervalle borné $]0,\pi]$).

D'après le théorème de dérivation sous le signe somme (théorème de LEIBNIZ), la fonction ϕ est dérivable sur $[a,b]$, et ceci pour tout $(a,b) \in]0,1[^2$ tel que $a < b$ et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe somme. Finalement, la fonction ϕ est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ \phi'(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{t\sin(t)\cos(t)}{(1-x\cos(t))^2}\,dt.}$$

b- Soit $x \in]0,1[$. Les deux fonctions $t \mapsto t\cos(t)$ et $t \mapsto -\dfrac{1}{1-x\cos(t)}$ sont de classe C^1 sur le segment $[0,\pi]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}
x\phi'(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos(t)\frac{x\sin(t)}{(1-x\cos(t))^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[t\cos(t)\frac{-1}{1-x\cos(t)}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(t)-t\sin(t)}{1-x\cos(t)}\,dt \\
&= \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{t\sin(t)}{1-x\cos(t)}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(t)}{1-x\cos(t)}\,dt = \frac{1}{1+x} - \phi(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(t)}{1-x\cos(t)}\,dt
\end{aligned}$$

En posant $u = \tan(t/2)$, on obtient

$$\int_0^{\pi}\frac{\cos(t)}{1-x\cos(t)}\,dt = \int_0^{+\infty}\frac{1-u^2}{1+u^2}\frac{1}{1-x\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2du}{1+u^2} = \int_0^{+\infty}\frac{2(1-u^2)}{((1-x)+(1+x)u^2)(1+u^2)}\,du$$

Maintenant,

$$\frac{2(1-u^2)}{((1-x)+(1+x)u^2)(1+u^2)} = \frac{A}{u+i} + \frac{\overline{A}}{u-i} + \frac{B}{u+i\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}} + \frac{\overline{B}}{u-i\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}},$$

avec $A = \dfrac{2(1+1)}{((1-x)-(1+x))(-i-i)} = -\dfrac{i}{x}$ et donc, $\dfrac{A}{u+i} + \dfrac{\overline{A}}{u-i} = \dfrac{1}{x}\left(-\dfrac{i}{u+i} + \dfrac{i}{u-i}\right) = -\dfrac{2}{x}\times\dfrac{1}{u^2+1}$. Puis,

$$\begin{aligned}
\frac{2(1-u^2)}{((1-x)+(1+x)u^2)(1+u^2)} + \frac{2}{x(u^2+1)} &= \frac{2x(1-u^2)+2((1-x)+(1+x)u^2)}{x((1-x)+(1+x)u^2)(1+u^2)} \\
&= \frac{2}{x}\frac{1}{(1-x)+(1+x)u^2}
\end{aligned}$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(t)}{1-x\cos(t)}\,dt &= \frac{1}{\pi x}\int_0^{+\infty}\left(-\frac{2}{u^2+1} + \frac{2}{(1-x)+(1+x)u^2}\right)du \\
&= \frac{1}{\pi x}\left[-2\operatorname{Arctan}(u) + \frac{2}{1+x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\operatorname{Arctan}\left(u\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right)\right]_0^{+\infty} = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout x de $]0,1[$,

$$x\phi'(x) + \phi(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

c- D'après 3-b-, $\phi_{/]0,1[}$ est solution de (E) sur $]0,1[$, et d'après 3-a-, $\phi_{/]0,1[}$ se prolonge par continuité en 0 et en 1. D'après 2-,

$$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ \phi(x) = \frac{1}{x}(\ln(x+1) - \ln(1+\sqrt{1-x^2}) + \ln 2),}$$

Par continuité de ϕ en 1, on en déduit que

$$I = \pi\Phi(1) = \pi \lim_{x\to 1,\ x<1} \Phi(x) = \pi \lim_{x\to 1,\ x<1} \frac{1}{x}(\ln(x+1) - \ln(1+\sqrt{1-x^2}) + \ln 2) = 2\pi \ln 2.$$

On peut maintenant raisonablement estimer que très probablement

$$\boxed{\int_0^{\pi} \frac{t\sin t}{1-\cos t}\,dt = 2\pi \ln 2.}$$

